

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΚΑΤΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ

- 1) Μια θερμότητα ενισχύη πάνω έχει στο σημείο (x, y) θερμοκρασία, $f(x, y) = 10 + 6x^2 - 2xy + 10y^2$
Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της θερμοκρασίας για κανόνι που βρίσκεται στο σημείο $(1, 1)$ και αναπαύεται να πάει στο $(0, 0)$

ΛΥΣΗ

Γενικά, $\frac{\partial F}{\partial \vec{n}}(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \vec{n}$ (1)

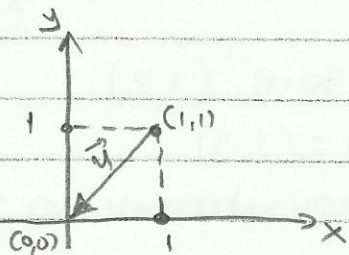
Άρα, $\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) = (12x - 2y, -2x + 20y)$

Άρα, το $(1, 1)$ στο $(0, 0)$ έχουμε το $\vec{u} = (-1, -1)$

Το \vec{u} πρέπει να είναι μοναδιαίο άρα:

το κανονικοποιούμε:

$$\vec{n} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$



Άρα, στη σχέση (1) έχουμε:

$$\frac{\partial F}{\partial \vec{n}}(x, y) = (12x - 2y, -2x + 20y) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

οπότε $\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}(1, 1) = (10, 18) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) = -\frac{28}{\sqrt{2}}$

ΣΥΝΗΡΑΞΗ:

Ο ρυθμός μεταβολής είναι η παράγωγος κατά κατεύθυνση ως προς μοναδιαίο διάνυσμα!

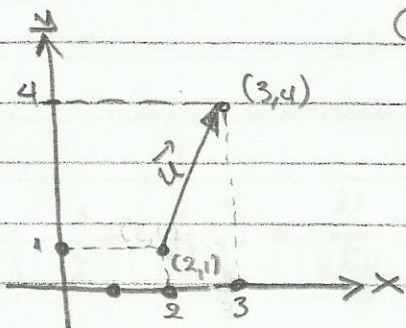
2) Ένας μεταλλικός δίσκος θερμαίνεται έτσι ώστε η θερμοκρασία σε ένα σημείο (x, y) να δίνεται από την συνάρτηση:

$$T(x, y) = 50 y^2 \cdot e^{-\frac{1}{5}(x^2 + y^2)}$$

Ένα ζώο βρίσκεται στη θέση $(2, 1)$

Εάν το ζώο κατευθυνθεί προς το σημείο $(3, 4)$, ποιος ο ρυθμός μεταβολής της θερμοκρασίας σε αυτή τη νέα διεύθυνση;

ΛΥΣΗ



(*) Γενικά, $\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}(x, y) = \nabla f(x, y) \cdot \vec{n}$, $\|\vec{n}\| = 1$.

$$\nabla f(2, 1) = \left(-40 \frac{1}{e}, 80 \frac{1}{e}\right) = 40 \cdot e^{-1} (1, 2)$$

Ενώ, το $\vec{u} = (3-2, 4-1) = (1, 3)$

όπου το \vec{u} δεν είναι κανονικοποιημένο.

Αρα, κανονικοποιώντας το \vec{u} έχουμε ότι το διάνυσμα

$$\vec{n} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \frac{(1, 3)}{\sqrt{10}} = \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$$

Επομένως, βάση της (*) έχουμε:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(2, 1) = \nabla f(2, 1) \cdot \vec{n} = 40 \cdot e^{-1} (1, 2) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right) = \frac{200}{e\sqrt{10}}$$

Η παράγωγος κατά κατεύθυνση του διανυσματος $\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$.